

Ф-ция Грина ($\equiv$ гр-ция Грина д/оператора Лапласа с условиями Дирихле)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $\partial\Omega$ считается кус-гладкой; $E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2, \\ \frac{1}{n(n-2)|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$

- фунд. реш. ур-ния Лапласа

Основное гр. Ф-цией Грина д/оп-ра Лапласа в обл-ти Ω с кр. усл. 1-го рода наз-ся вырат-е $G(x, y) = E(x-y) + g(x, y)$, $\forall x, y \in \Omega$, $x \neq y$, где гр-ция $g(x, y)$ при $\forall$ фикс. $y \in \Omega$ удовл. след. усл. по перемен. x :

1) $g(\cdot, y) \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\Delta g(x, y) = 0$ всюду в Ω ;

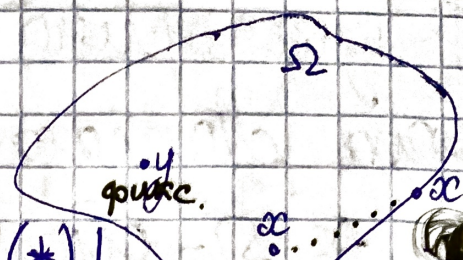
2) $G(x, y)|_{x \in \partial\Omega} = 0$;

3) If Ω -неогр. обл-ть, то $G(x, y) = O(1)$ при $|x| \rightarrow \infty$ (if $n=2$) или $G(x, y) = o(1)$ при $|x| \rightarrow \infty$ (if $n \geq 3$) // Усл. ! на ∞

// Далее, на лекциях: Ω -огр. обл-ть и усл. 3) не понадобятся!

Из 1), 2) $\Rightarrow$, что при $\forall$ фикс. $y \in \Omega$ гр-ция $g(x, y)$ удовл. задаче Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta_x g(x, y) = 0 \text{ в } \Omega, \\ g(x, y)|_{x \in \partial\Omega} = -E(x-y)|_{x \in \partial\Omega} \end{cases} \quad (*)$$



При фикс. $y \in \Omega$ реш. зад. (*):
(зад. Дирихле / ф-ция Лап.) $\Rightarrow$ if ф-ция Грина на $\mathbb{R}^2$, то она строится однозначно.

Вопрос о $\mathbb{R}^2$ сейчас не $\neq$: считаем, что Ω выбрана так, что g / нее ф-цию Грина можно построить. $\neq$ следствие этого факта.

[(симметрия ф-ции Грина)] Ω -обр. об-ть, $\Omega \in (GO)$. Тогда $G(x, y) = G(y, x)$ $\forall x, y \in \Omega, x \neq y$. (Док-во в след. лекции)

Отсюда $\Rightarrow$: $g(x, y) = G(x, y) - E(x-y) = G(y, x) - E(y-x) = g(y, x)$, $\forall x, y \in \Omega$ (в том числе $g(x, x)$, ибо $g(x, x)$ корр. определено).

Из 1), 2) + св-во симметрии выводится двойственные св-ва ф-ции Грина:

При $\forall$ фикс. $x \in \Omega$ по перем. y вып. соотн:

4) ~~$g(x, \cdot) \in C^2(\Omega)$~~ $g(x, \cdot) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta_y g(x, y) = 0$ всюду в Ω ;

5) $G(x, y)|_{y \in \partial\Omega} = 0$.

Тем самым, $g(x, y)$ при $\forall$ фикс. $x \in \Omega$ удовл. след. зад. Дири по перем. y :

$\Delta_y g(x, y) = 0$ в Ω ,

(**)

$g(x, y)|_{y \in \partial\Omega} = -E(x-y)|_{y \in \partial\Omega}$

Именно соотнош. (**) мы будем пользоваться далее.

Применение ф-ции Грина

к зад. Дири. д/у ф-ции Грасеона:

$f(x) = f$ в Ω ,

(I) $u|_{\partial\Omega} = \varphi$

$f = f(x)$ задана в Ω , $\varphi = \varphi(x)$ задана на $\partial\Omega$.

Допустим, что зад. (I) имеет реш. и $\in C^2(\bar{\Omega})$.

Как его найти конструктивно?

Возьмем д/у $u(x)$ функ. ф-ции Грина

$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \underbrace{\Delta u(y)}_{=f(y)} dy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \right) \underbrace{u(y)}_{=\varphi(y)} -$

$- E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}) dS_y = \int_{\Omega} E(x-y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) dS_y$

$$\varphi(y) ds_y - \underbrace{\int_{\Omega} E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial y} ds_y}_{=I}, \quad \forall \text{ точки } x \in \Omega$$

Применим эту ф-лу Грина к рае $u(y)$,
 $\varphi(y) = E(x-y) = E(y-x)$

$$\int_{\Omega} (E(x-y) \Delta u(y) - u(y) \Delta_y E(x-y)) dy = \int_{\Omega} (E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial y} - u(y) \frac{\partial E}{\partial y}) dy$$

Здесь $I \equiv \int_{\Omega} g(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial y} ds_y$

Применим эту ф-лу Грина к рае $u = u(y)$, $\varphi = \varphi(y) = g(x,y)$ при точке $x \in \Omega$

$$\int_{\Omega} (u(y) \Delta_y g(x,y) - g(x,y) \Delta u(y)) dy = \int_{\Omega} (u(y) \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - g(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial y}) ds_y$$

$\equiv 0$ (в силу **)
 $\equiv f(y)$ (в силу I)
 $\equiv \varphi(y)$

$\equiv I$

$$I = \int_{\Omega} g(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial y} ds_y = \int_{\Omega} g(x,y) f(y) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \varphi(y) ds_y$$

$$\varphi(y) ds_y$$

Подставляем в исход ф-лу Грина:

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) f(y) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial y} \varphi(y) ds_y + \int_{\Omega} g(x,y) f(y) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \varphi(y) ds_y = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \varphi(y) ds_y, \quad \forall x \in \Omega$$

установили такой рез-т:

$\Downarrow \exists \Omega$ -отр. обл-ть в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Omega \in (GO)$.

$\exists$ ф-ция Грина $G(x, y)$ д/отр-ти G .

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ - реше. зад. Дир. (I). Тогда спра-
ведлива разрешающая ф-ла:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) dS_y, \quad \forall x \in \Omega \quad (II)$$

~~Лемма~~ $\Downarrow$ полностью доказана (Рок-во. Вэйнс).

! зам ф-ла (II) восстанавливает реше. зад. Дир. (I), if заранее известно, что такое реше. $\exists$, и ф-ция Грина сиб построена. Воп-рос Эниже реш-я и построения ф-ции Грина обсуждается отдельно.

Тем не достаточ. усл-я разрешимос-ти зад. (I) и справедливости ф-лы (II)

1) Ω -отр. обл-ть в $\mathbb{R}^n$ с кус. гладк. или просто гладк. границей (еще лучше, if она выпуклая)

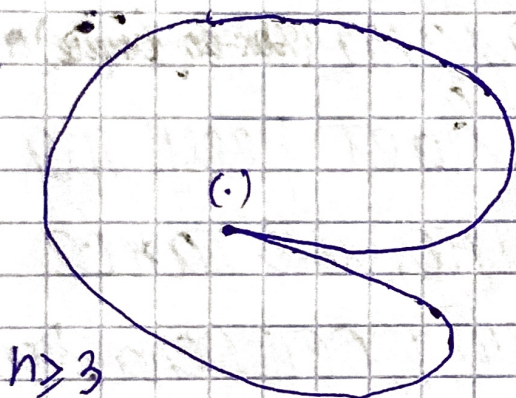
2) $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$

3) $f \in C^1(\overline{\Omega})$ (или $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, где $0 < \alpha \leq 1$) // усл. Гельдера

$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha$ $\forall x, y \in \Omega$ с некот. const $\alpha \in (0, 1]$ и $M = M(f)$

Особоговаривается в размерности $n \geq 3$ и выше, что в Ω должны отсутствовать острые пики, направленные внутрь обл-ти. На величину заостренности имеются четкие обратные-я.

Пик с экспоненциальной заостренностью. Задача об непрерывности $\int \Delta u = 0$ в Ω при $\int u|_{\partial\Omega} = \varphi$



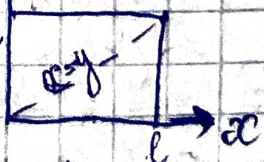
некоторых $\varphi \in \partial\Omega$ // Огни святого Эльма //
 // Теряется стационарность распределения электростатического поля вблизи пика //

NOT FOR AN EXAM

Связь ф-ции Грина и ОДУ

* Кр. зад: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, $0 \leq x \leq l$,
 $\Gamma_0(y) = 0$, $\Gamma_l(y) = 0$

Ф-ция Грина $G(x, y)$ в прямоугол. $(x, y) \in [0, l] \times [0, l]$. Построим $G(x, y) \Rightarrow$ получили разрешенную ф-лу: $y(x) = \int_0^l G(x, y) f(y) dy$, $\forall x \in [a, b]$,

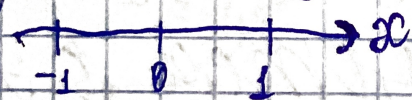


$\forall f \in C[0, 1]$.

В одномер. случае у ф-ции Тейлора слабая особенность при $x=y$: она сама непрерывна, но ее 1ая производная терпит скачок.

Одномер. случай

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2}, \quad E(x) = \frac{1}{2}|x|.$$



У функц. реш-я только слабая особенность.